

Examen HAVO 2010

tijdvak 2
woensdag 23 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde A

Dit examen bestaat uit 21 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 83 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Haaienpak

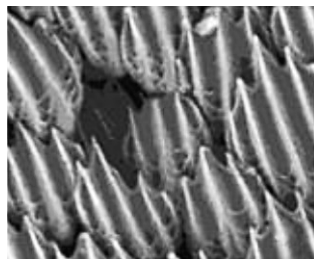
Bij het wedstrijdzwemmen wordt van alles geprobeerd om de snelheid te verhogen of de weerstand (ten opzichte van het water) te verlagen.

Bij zwemmen gaat het dus ook om het materiaal van het zwempak (badpak of zwembroek). Enkele jaren geleden zwom bijna iedereen in een zogenoemd haaienpak, een zwempak van materiaal dat erg lijkt op de huid van een haai. Zie de foto's.

foto's



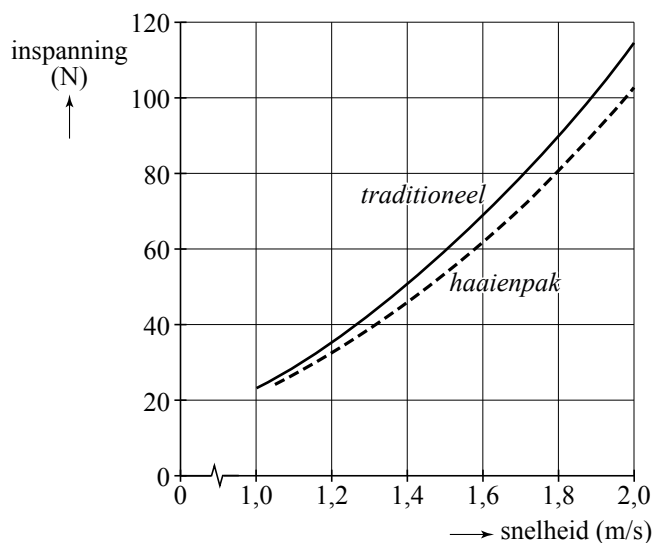
haaienpak



huid van een haai

In de figuur is het verband tussen snelheid (in m/s) en inspanning (in Newton (N)) uitgezet, zowel voor zwemmen in een traditioneel zwempak als voor zwemmen in een haaienpak.

figuur



Duidelijk is te zien dat bij een hogere snelheid een grotere inspanning hoort en dat de grafiek die bij het haaienpak hoort lager ligt dan de grafiek die bij een traditioneel zwempak hoort. Voor dezelfde snelheid is in een haaienpak dus minder inspanning nodig.

De inspanning die nodig is met het traditionele zwempak en met het haaienpak kun je berekenen met de volgende formules:

$$I_{\text{traditioneel}} = 23,32 \cdot v^{2,29}$$

$$I_{\text{haaienpak}} = 21,66 \cdot v^{2,23}$$

Hierin is I de inspanning in Newton (N) en v de snelheid in m/s.

Met behulp van de formules kun je bij een bepaalde snelheid berekenen hoeveel procent minder inspanning er in een haaienpak nodig is, vergeleken met een traditioneel zwempak.

- 4p **1** Bereken dit percentage bij een snelheid van 1,5 m/s.

In de figuur lijkt het dat in een haaienpak minder inspanning nodig is. Toch is dat niet altijd het geval, want de grafieken zullen elkaar ergens tussen 0 m/s en 1 m/s snijden.

- 4p **2** Bereken voor welke snelheden in het traditionele zwempak een lagere inspanning nodig is dan in een haaienpak.

Tijdens de Olympische Spelen van Sydney in 2000 zwom Pieter van den Hoogenband op de 100 meter vrije slag een wereldrecord in een tijd van 47,84 seconden. Pieter droeg toen voor het eerst een haaienpak.

Met behulp van de formules kunnen we berekenen welke tijd Pieter had gezwommen als hij niet in een haaienpak, maar in een traditioneel zwempak had gezwommen, en precies dezelfde inspanning had geleverd.

- 6p **3** Bereken de tijd die Pieter in een traditioneel zwempak zou hebben gezwommen.

Te zwaar voor je lengte?

Te zwaar zijn is een gevaar voor de gezondheid. Je lengte kun je nauwelijks beïnvloeden, maar je gewicht wel. Daarom worden de lengte en het gewicht van een mens met elkaar vergeleken. Dat kan op verschillende manieren. Bij de eerste manier wordt gebruik gemaakt van het gegeven dat lengte en gewicht normaal verdeeld zijn. Bij de tweede manier is er een index opgesteld die aangeeft of iemand te licht, normaal of te zwaar is.

In deze opgave bekijken we de lengte en het gewicht van volwassen Nederlandse mannen.

De lengte van deze mannen is bij benadering normaal verdeeld. We gaan ervan uit dat ook het gewicht normaal verdeeld is. Gegevens daarvan vind je in de tabel.

tabel

	gemiddelde	standaardafwijking
lengte (in cm)	182,5	6,2
gewicht (in kg)	79,6	11,2

- 3p **4** Bereken hoeveel procent van de mannen minder weegt dan 70 kg.
- 3p **5** Bereken hoe lang een man minstens moet zijn om bij de langste 5% te behoren.

We definiëren de verhouding V voor een man als volgt:

$$V = \frac{\text{het percentage mannen dat een lager gewicht heeft dan hijzelf}}{\text{het percentage mannen dat een kleinere lengte heeft dan hijzelf}}$$

Er geldt:

- Als V tussen 0,25 en 1,25 ligt, heeft hij een normaal gewicht
- Als $V > 1,25$ dan is hij te zwaar voor zijn lengte
- Als $V < 0,25$ dan is hij te licht voor zijn lengte

Voor Daan, die 179 cm lang is en 78 kg weegt, geldt $V \approx 1,55$. Hij is dus te zwaar voor zijn lengte.

Sem is 188 cm lang en weegt 91 kg.

- 6p **6** Heeft hij een normaal gewicht? Licht je antwoord toe.

Martin heeft een gemiddelde lengte, dus de helft van de mannen is kleiner dan hij. Zijn gewicht daarentegen is hoger dan gemiddeld.

- 3p **7** Bereken welke V Martin **maximaal** kan hebben.

Er is nog een bekend verband tussen lengte en gewicht van mensen, namelijk de Quetelet-Index, tegenwoordig meestal Body Mass Index (*BMI*) genoemd:

$$BMI = \frac{\text{gewicht}}{\text{lengte}^2}$$

Hierin is *gewicht* in kg en *lengte* in m (en dus niet in cm zoals in de eerdere vragen van deze opgave!).

Voor een man met een gemiddeld gewicht (79,6 kg) en een gemiddelde lengte (1,825 m) geldt $V = 1$, want 50% van de mannen is kleiner en 50% is lichter dan hij. Volgens de formule heeft hij een *BMI* van 23,9.

Er zijn heel veel mannen met $V = 1$: alle mannen waarbij de twee percentages in de formule van V gelijk zijn.

Je kunt je afvragen of al die mannen met $V = 1$ ook allemaal een *BMI* van 23,9 hebben. Anders gezegd, of bij een ander percentage dan 50 de uitkomst ook 23,9 is.

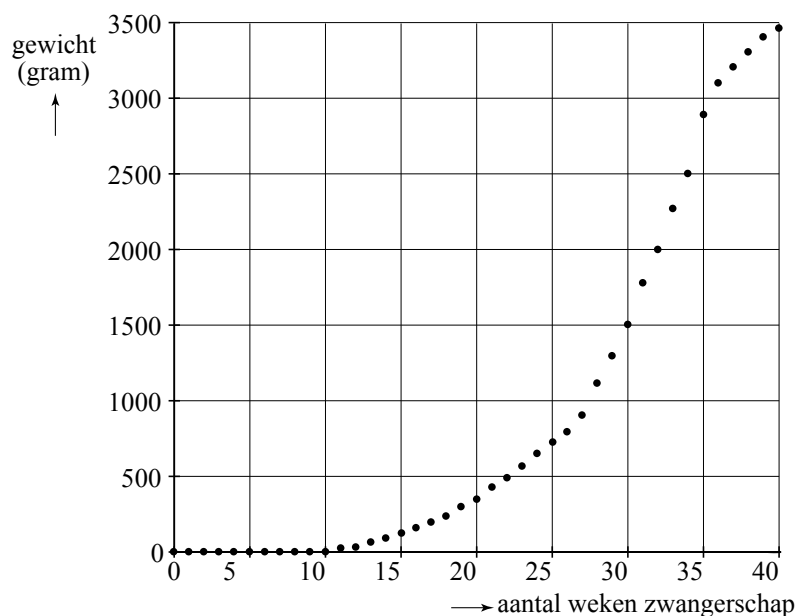
4p 8 Onderzoek met een berekening of dat laatste waar is.

Gewicht ongeboren kind

Er bestaan methoden om tijdens de zwangerschap het gewicht van het ongeboren kind te schatten.

Van een baby die bij zijn geboorte 3480 gram woog, is in de figuur het gewicht vóór de geboorte weergegeven.

figuur



Uit de figuur blijkt dat het gewicht van het ongeboren kind tot week 30 bij benadering exponentieel toeneemt.

Je kunt aflezen dat het gewicht na 20 weken van de zwangerschap 350 gram is en na 30 weken 1500 gram.

- 4p **9** Bereken het groeipercentage per week in één decimaal nauwkeurig. Ga daarbij uit van het gewicht na 20 weken en het gewicht na 30 weken.

Voor de eerste tien weken van de zwangerschap is het gewicht niet af te lezen in de figuur. Toch kunnen we, als we weten dat het gewicht na 20 weken zwangerschap 350 gram is en als we uitgaan van exponentiële groei met een groeipercentage van 16% per week, het gewicht ook in de eerste tien weken berekenen.

- 3p **10** Bereken het gewicht na acht weken zwangerschap.

De aanstaande vader wilde graag de gegevens uit de figuur in een formule verwerken. Hij vond een formule die het gewicht van het ongeboren kind vanaf de 20e week goed benadert:

$$G = \frac{3200}{(1 + 63 \cdot 0,69^{(t-20)})} + 300$$

Hierin is G het gewicht van het ongeboren kind in gram en t het aantal weken van de zwangerschap.

- 4p **11** Bereken hoeveel procent het gewicht na 30 weken van de zwangerschap volgens de formule afwijkt van de 1500 gram uit de figuur.

Volgens de formule wordt het geboortegewicht van 3480 gram veel later bereikt dan de 280 dagen (= 40 weken) die we in de figuur aflezen.

- 4p **12** Bereken hoeveel dagen later.

Dobbelspel

Vijf vriendinnen, onder wie Frédérique en Anne, spelen een spelletje met een dobbelsteen. Ze spelen om geld: iedereen legt één euro in de pot.

Het spelverloop is als volgt:

1e ronde:	iedereen gooit één keer met de dobbelsteen <ul style="list-style-type: none">wie een zes gooit stoptwie geen zes gooit, gaat naar de tweede ronde
2e ronde:	wie in de eerste ronde geen zes heeft gegooid, gooit opnieuw <ul style="list-style-type: none">wie nu een zes gooit, stopt ookwie geen zes gooit, gaat naar de derde ronde
3e ronde:	wie in de tweede ronde geen zes heeft gegooid, gooit nog één keer
Afloop	<ul style="list-style-type: none">de pot wordt gelijkelijk verdeeld tussen alle spelers die in één van de drie ronden een zes hebben gegooidals tijdens het spel niemand een zes heeft gegooid, krijgt iedereen haar euro terug

- 3p 13 Toon aan dat de kans dat Frédérique pas in de 3e ronde een zes gooit ongeveer gelijk is aan $0,116$.

Anne mag dus mee delen in de pot als zij in één van de drie ronden een zes heeft gegooid.

- 4p 14 Bereken de kans dat Anne mag mee delen in de pot.

Een speler gooit in één spel dus maximaal drie keer. Na de derde keer is het spel afgelopen.

In de tabel staat een gedeeltelijk ingevulde kansverdeling van het aantal keer dat een speler in een spel gooit.

tabel

aantal keer gooien	1	2	3
kans	$\frac{1}{6}$

Met behulp van deze kansverdeling kun je de verwachtingswaarde berekenen van het aantal keer dat een speler in een spel gooit.

- 5p 15 Vul de kansverdeling verder in en bereken hiermee deze verwachtingswaarde.

Als tijdens de drie ronden geen van de vijf vriendinnen een zes gooit, krijgt iedereen haar geld terug. De kans dat iedereen haar geld terug krijgt, is ongeveer gelijk aan 0,065.

3p **16** Bereken die kans in 4 decimalen.

De vriendinnen spelen het spelletje tijdens een vakantie elke avond een aantal keer.

4p **17** Bereken de kans dat in 45 spelletjes meer dan vier keer iedereen haar geld terug krijgt.

Drinkwater

Duinwaterbedrijf Zuid-Holland is een bedrijf dat de levering van drinkwater verzorgt. Het bedrijf bepaalt ieder jaar opnieuw de tarieven van het drinkwater dat zij leveren.

In 2007 werd het tarief per m³ drinkwater verlaagd met € 0,14 ten opzichte van het tarief van 2006. Het nieuwe tarief in 2007 werd € 1,10. Tegelijkertijd werd het vastrecht verhoogd van € 47,52 in het jaar 2006 tot € 52,80 in het jaar 2007.

- 4p 18 Bereken met deze gegevens bij welk drinkwaterverbruik je in 2007 goedkoper uit bent dan in 2006.

Hieronder zie je een uitgebreid overzicht van de drinkwatertarieven 2007 van Duinwaterbedrijf Zuid-Holland.

Drinkwatertarieven 2007

Tarief per m³

Het tarief per m³ daalt ten opzichte van vorig jaar met maar liefst € 0,14 naar € 1,10.

Vastrecht

Het vastrecht voor woningen stijgt van € 47,52 naar € 52,80 per jaar.

Belasting

Drinkwaterbedrijven zijn verplicht waterbelasting in rekening te brengen. Voor 2007 is het tarief € 0,149 per m³ drinkwater.

Gemeentelijke belasting

Sommige gemeenten brengen Duinwaterbedrijf Zuid-Holland belasting in rekening voor het hebben van leidingen in hun gemeentegrond. Wie in één van onderstaande gemeenten woont, betaalt per aansluiting een jaarbijdrage in de vorm van een extra gemeentelijke belasting.

Katwijk (inclusief Rijnsburg, Valkenburg) € 21,90

Leiden € 36,10

Leidschendam-Voorburg € 5,50

Zevenhuizen-Moerkapelle € 13,95

btw

Alle genoemde bedragen zijn exclusief 6% btw.

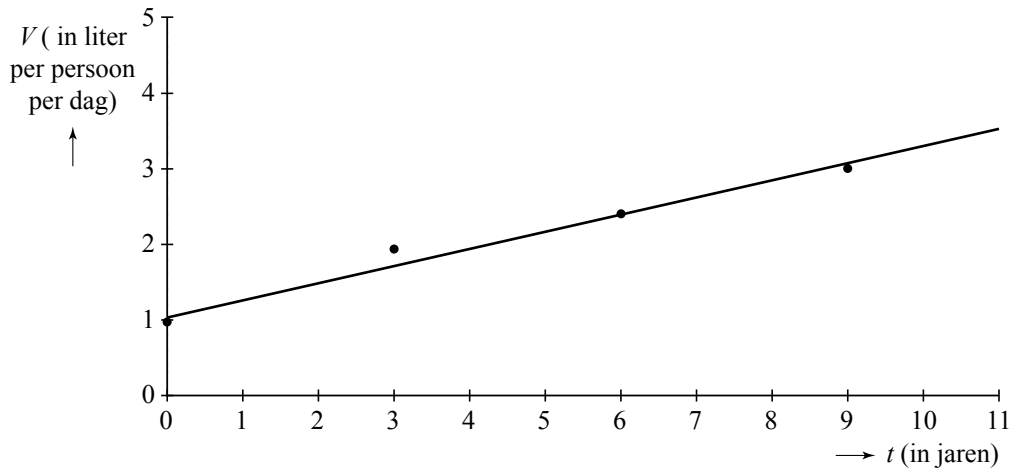
In het jaar 2007 heeft de familie Akela 180 m³ water verbruikt. De familie woont in Leiden.

- 5p 19 Hoeveel heeft deze familie voor het hele jaar 2007 in totaal betaald, inclusief btw?

Lang niet al het drinkwater wordt gebruikt om te drinken. Het meeste drinkwater wordt gebruikt voor andere zaken, zoals douchen, wassen en het toilet doorspoelen.

Een gedeelte van het drinkwater wordt gebruikt voor de vaatwasmachine. Gegevens daarvan staan in de figuur, waarbij geldt dat 1995 overeenkomt met $t = 0$.

figuur waterverbruik vaatwasmachine



In deze grafiek kun je bijvoorbeeld aflezen dat er in 2001 ($t = 6$) gemiddeld over alle Nederlanders ongeveer 2,4 liter water per persoon per dag wordt gebruikt voor vaatwasmachines.

Het lijkt erop dat V , het waterverbruik van de vaatwasmachine in liter per persoon per dag, bij benadering lineair toeneemt. Daarom is een lijn getekend die zo goed mogelijk bij de gegevens past.

De formule van de lijn is $V = a \cdot t + b$, waarbij t de tijd is in jaren na 1995.

4p **20** Bereken a en b en rond af op een decimaal.

De gegevens over het waterverbruik van de vaatwasmachine komen van het Centraal Bureau voor de Statistiek. Men deelt het totale waterverbruik voor de vaatwasmachine in een bepaald jaar door het aantal dagen van het betreffende jaar en door het totaal aantal Nederlanders in dat jaar.

Bij deze berekening kun je echter kanttekeningen plaatsen. Er wordt van uitgegaan dat iedereen een vaatwasmachine heeft, en dat is niet zo. Als in de berekening alleen rekening gehouden wordt met personen die werkelijk de beschikking hebben over een vaatwasmachine, valt het verbruik per persoon per dag hoger uit. Dit verbruik wordt het **gecorrigeerde waterverbruik** van de vaatwasmachine (in liter per persoon per dag) genoemd.

In 2004 beschikte 58% van de 16 miljoen Nederlanders over een vaatwasmachine.

3p **21** Bereken het gecorrigeerde waterverbruik voor de vaatwasmachine (in liter per persoon per dag) in dat jaar.